MÉCANIQUE DU POINT

Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

Particule chargée dans un champ électrique constant et uniforme

On considère une cavité accélératrice linéaire formée de deux plaques fines et conductrices de grandes dimensions transversales en $x = 0$ et en $x = d$, auxquelles on applique une différence de potentiel constante $U = V(d) - V(0) > 0$ de telle sorte que règne dans l'espace entre les plaques un champ électrostatique uniforme:

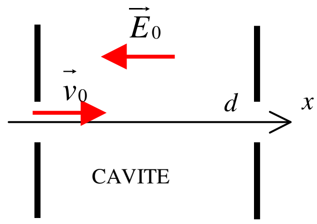


figure 1

$$\vec{E}_0 = -E_0\vec{e}_x = \frac{U}{d}\vec{e}_x = -\frac{m}{e}\alpha\,\vec{e}_x$$

où m est la masse de la particule, par exemple un électron, e la charge élémentaire ($q_{\text{électron}} = -e$) et α une constante caractérisant l'intensité du champ électrique appliqué.

Les plaques sont percées le long de l'axe (Ox) afin de permettre aux électrons d'entrer (en $x = 0$) et de sortir (en $x = d$) de la cavité accélératrice.

1) Montrer que l'on peut négliger le poids de l'électron devant la force générée par le champ électrique $\vec{E}_0$. On prendra $g = 10$ N.kg^{-1} et $\alpha = 10^{16}$ N.kg^{-1}.

2) Si une particule de charge q possède une accélération a, on montre qu'elle émet un rayonnement électromagnétique. On cherche l'expression de la puissance rayonnée $\mathcal{P}$ en prenant comme paramètres pertinents q et a (paramètres caractéristiques de la particules), ε_0, constante caractéristique de l'électromagnétisme et c, la vitesse de la lumière dans le vide , caractéristique du phénomène de rayonnement électromagnétique. Proposer une expression de $\mathcal{P}$ en fonction de q, a, c et ε_0.

On rappelle l'expression du champ électrique crée par une charge q fixe, à la distance r :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\,.$$

3) Soit $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ la vitesse initiale de l'électron à l'entrée de la cavité, à $t = 0$ et T le temps que met l'électron à traverser la cavité .

a) En négligeant le rayonnement d'énergie électromagnétique émis par l'électron accéléré, déterminer l'expression de d en fonction de T.

b) En déduire, en fonction de v_0, α et d, les expressions de T et de la vitesse de sortie de la cavité $\vec{v}_1$.

4) Le rayonnement d'énergie électromagnétique dû à l'accélération de l'électron modifie son mouvement dans la cavité : il met un temps T' pour franchir la cavité et ressort avec une vitesse $\vec{v}_1\,'$.

On voudrait déterminer $\vec{v}_1\,'$. Pour cela, compte tenu du faible effet lié au rayonnement, on fait les hypothèses suivantes.

- On utilise la formule de Larmor pour évaluer la puissance rayonnée par l'électron :

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}a^2 = m\tau a^2 \text{ avec } \tau = \frac{e^2}{6\pi m\varepsilon_0 c^3}.$$

en prenant pour l'accélération a celle obtenue en négligeant l'effet dû au rayonnement (c'est-à-dire celle correspondant à la situation de la question précédente).

• On considère qu'au premier ordre dans l'évaluation de $\vec{v}_1\,'$ on peut assimiler le temps que met l'électron à traverser la cavité à T ; on posera donc $T'' \approx T$.

a) Effectuer un bilan énergétique entre l'entrée et la sortie de l'électron, afin de déterminer $\left\|\vec{v}_1\,'\right\|^2$ en fonction de v_1, a, T et τ.

b) Mettre le résultat sous la forme $v_1\,' \simeq v_1 - \xi \dfrac{T}{v_1}$ et exprimer la constante ξ en fonction de α et τ.

Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN.

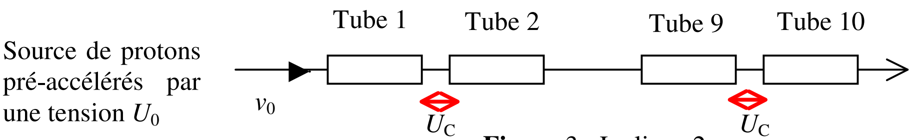


Figure 3 : Le linac 2

5) Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale U_C toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes.

Les protons, de masse m_P, sont injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-accéleratrice U_0.

a) En négligeant le rayonnement d'énergie électromagnétique par le proton accéléré, exprimer l'énergie cinétique des protons à la sortie du $n^{\text{ième}}$ tube en fonction de U_C et U_0.

b) Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du $10^{ème}$ tube pour $U_0 = 200\ k\text{V}$ et $U_C = 2000\ k\text{V}$. Sachant qu'une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, ces protons sont-ils relativistes ?

Du linac 2 au synchroton à protons (PS)

Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS). Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.

6) On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. À t = 0, sa vitesse $\vec{v}_0$ est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 4.

a) Montrer que le travail reçu par le proton pendant son mouvement est nul. En déduire que le mouvement du proton est uniforme.

b) Montrer que la trajectoire du proton est plane.

c) On note $\underline{v}(t) = v_x(t) + iv_y(t)$ où $v_x(t)$ et $v_y(t)$ sont les composantes de la vitesse dans la base cartésienne indiquée sur la figure. En introduisant une pulsation ω qui s'exprime simplement en fonction de e , m_P et B_0, déterminer la fonction $\underline{v}(t)$.

d) Déterminer les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ et en déduire que la trajectoire du proton est un cercle dont on exprimera le rayon en fonction de m_P, B_0, e et v_0.

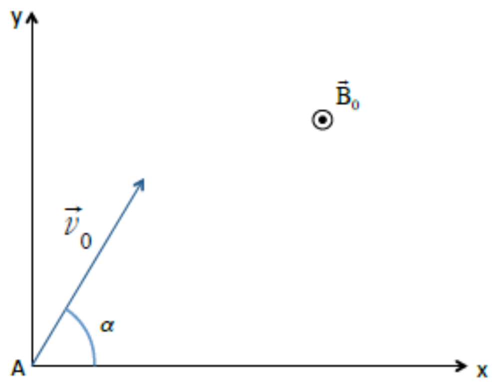


Figure 4 : Vitesse du proton dans le champ magnétique

e) Quelle est l'interprétation physique de ω ?

Rayonnement synchroton

Lorsque la particule accélérée est un électron de masse $m_e << m_P$, son accélération est plus grande puisque sa masse est plus faible. On ne peut plus négliger totalement le rayonnement qu'elle émet.

7) Du fait du rayonnement émis par l'électron accéléré par le champ magnétique $\vec{B}_0$, son énergie cinétique décroît au cours du temps. Cet effet étant faible, on peut dans la formule de Larmor pour la puissance rayonnée $\mathcal{P}$ donnée à la question 3 remplacer l'accélération a de l'électron par celle obtenue en ne tenant compte que de l'action du champ magnétique.

a) Déterminer, en fonction de m_e, B_0, e, ε_0 et E_C (énergie cinétique de l'électron), la puissance $\mathcal{P}$ rayonnée par l'électron. En déduire l'expression de E_C au cours du temps et déterminer l'expression du temps caractéristique τ' de décroissance de cette énergie.

b) On considère un électron d'un faisceau synchrotron magnétiquement guidé le long d'une trajectoire circulaire de rayon R_0 (il ne passe plus dans une cavité accélératrice). Sur un tour, l'énergie ΔE perdue par cet électron est faible et la norme v de sa vitesse quasi-constante. Déterminer l'énergie ΔE rayonnée par l'électron sur un tour en fonction de v, R_0, e, c et ε_0.

c) On veut évaluer l'énergie perdue par rayonnement d'un électron, sur un tour, dans le cas du synchrotron à électrons SOLEIL de Saclay de rayon $R_0 \approx 56$ m, utilisé (entre autre) comme source intense de rayons X à des fins de recherche notamment dans les domaines de la matière condensée et de la biophysique (grâce à la diffraction des rayons X le synchrotron joue le rôle d'un véritable « nanoscope » capable de sonder la structure de cellules organiques où de systèmes inorganiques mésoscopiques).

Pour cela on doit tenir compte du fait que la vitesse d'un électron du faisceau est ultra-relativiste ce qui modifie le calcul de la puissance rayonnée. Dans le cas d'une orbite circulaire, l'expression de l'énergie ΔE rayonnée par un électron sur un tour reste simple : on trouve le résultat de la question précédente multiplié par le coefficient γ^4, où γ est le facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} .$$

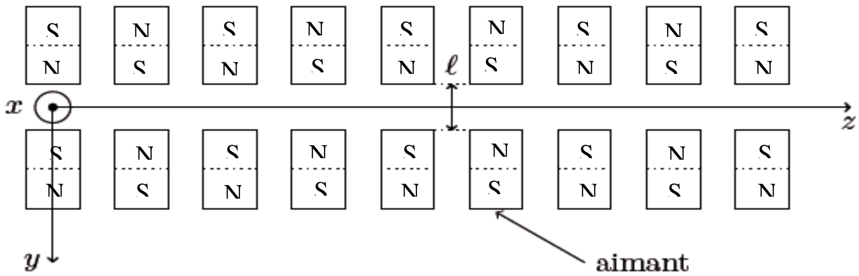
Pour un faisceau d'électrons ultra-relativistes dont la vitesse vaut 99,9999983 % de la vitesse de la lumière, circulant dans le synchrotron SOLEIL, calculer γ.

d) Calculer l'énergie $\Delta\mathcal{E}$ (en keV) perdue par tour et par électron.

e) Calculer le temps T_0 mis par un électron pour effectuer un tour complet de l'anneau de stockage.

En déduire le temps $\tau_{10\%}$ au bout duquel le faisceau aura perdu 10% de son énergie sachant que son énergie nominale est de 2,75 GeV. Commenter.

8) De nombreuses applications du rayonnement synchrotron (comme par exemple le traitement de tumeurs cérébrales par irradiation synchrotron à l'ESRF de Grenoble) nécessitent d'affiner le spectre émis par les électrons du synchrotron et d'avoir un rayonnement plus intense. Pour cela, on les injecte dans une structure magnétique périodique appelée onduleur ou wiggler représentée ci-dessous, où l'on a indiqué les pôles N et S des aimants.



L'électron se déplace initialement suivant l'axe (Oz) à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z$ et pénètre dans l'onduleur. Donner une évaluation de la puissance moyenne (sur une période spatiale du champ magnétique) émise par un électron traversant l'onduleur.

Formulaire

$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\ ;\ \cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\ ;\ \sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$$

Valeurs numériques

Vitesse de la lumière dans le vide c = 299 792 458 m·s^{-1}

Perméabilité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8{,}854\times10^{-12}$ F·m^{-1}

Charge élémentaire $e = 1{,}602\times10^{-19}$ C

Masse de l'électron $m_e = 9{,}109\times10^{-31}$ kg

Masse du proton $m_P = 1{,}6\times10^{-27}$ kg